

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

O alumno debe resolver só un exercicio de cada un dos tres bloques temáticos.

BLOQUE DE ÁLXEBRA (Puntuación máxima 3 puntos)

Exercicio 1. Determinar a matriz X na seguinte ecuación matricial $A^2X = \frac{1}{2}(A + B \cdot C)$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercicio 2. Un granxeiro dispón dun máximo de 45 hectáreas nas que quere sementar dous tipos de cultivo A e B , esperando obter un beneficio de 120 € por hectárea de A e 180 € por hectárea de B . Calcula que vai ter como máximo 600 horas de traballo dispoñibles durante a estación de sementeira e que vai precisar de 10 horas por hectárea de A e 40 horas por hectárea de B . Ademais, o tipo de cultivo esixe que as hectáreas dedicadas ó cultivo tipo B non superen ás do tipo A .

(a) Formular o sistema de inecuacións asociado ó enunciado. (b) Debuxar a rexión factible e calcular os seus vértices. (c) ¿Cantas hectáreas debe sementar de cada tipo de cultivo para maximizar o beneficio? Calcular dito beneficio máximo.

BLOQUE DE ANÁLISE (Puntuación máxima 3,5 puntos)

Exercicio 1. A función f definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que a súa gráfica pasa polo punto $(-1, 0)$ e ten un máximo relativo no punto $(0, 4)$.

(a) Determinar a función f (calculando a, b e c).

(b) Representar graficamente a función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ estudando: intervalos de crecemento e decrecemento, mínimo relativo, intervalos de concavidade e convexidade e punto de inflexión.

Exercicio 2. Nun hospital o número N de persoas afectadas por unha certa infección vírica, despois de t semanas, vén dado pola función

$$N(t) = \frac{350t}{2t^2 + kt + 8} \quad \text{sendo } t \geq 0.$$

(a) Sábese que o número de persoas afectadas ó cabo de 1 semana foi 50, calcúlese o valor de k .

(b) Para o valor de $k = -3$, calcular o máximo de persoas afectadas e a semana en que ocorre, ¿a partir de que momento, despois de acadar o valor máximo, o número de persoas afectadas é menor que 25?

BLOQUE DE ESTATÍSTICA (Puntuación máxima 3,5 puntos)

Exercicio 1. Unha investigación de mercado de 800 persoas revelou os seguintes feitos sobre a capacidade de lembrar un anuncio televisivo dun produto en particular e a adquisición de dito produto:

	<i>Lembran o anuncio</i>	<i>Non lembran o anuncio</i>
<i>Mercan o produto</i>	160	80
<i>Non mercan o produto</i>	240	320

(a) Calcular a probabilidade de que unha persoa lembre o anuncio ou merque o produto.

(b) Se unha persoa lembra o anuncio do produto, ¿que probabilidade hai de que o merque?

(c) ¿O feito de mercar o produto depende ou non de lembrar o anuncio? Xustifíquese a resposta.

Exercicio 2. (a) O soldo, en euros, dos empregados dunha fábrica segue unha distribución normal de media $\mu=1500$ euros e desviación típica $\sigma=400$ euros. Elíxese ó chou unha mostra de 25 empregados desa fábrica, ¿cal é a probabilidade de que a media dos seus soldos estea comprendida entre 1420 e 1600 euros?

(b) Se só coñecemos a desviación típica $\sigma=400$ euros e descoñecemos a media μ dos soldos dos empregados desa fábrica, ¿que tamaño de mostra deberíamos tomar para estimar μ cun nivel de confianza do 95% se se admite un erro máximo de 100 euros?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

O alumno debe resolver só un exercicio de cada un dos tres bloques temáticos.

BLOQUE DE ÁLXEBRA (Puntuación máxima 3 puntos)

Exercicio 1. Dada a ecuación matricial $X \cdot A + B^t = 2X$, sendo B^t a matriz trasposta de B e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Despejar a matriz X (b) Acha-la matriz inversa de $A - 2I$, sendo I a matriz identidade de orde 3.
(c) Resolver a ecuación matricial.

Exercicio 2. Unha explotación madeireira dedicada á plantación e recolección de piñeiros e eucaliptos decide repoboar un dos seus montes. Segundo un estudo dos técnicos, para que sexa rendible a explotación hanse de plantar entre 2 e 15 hectáreas de piñeiros e entre 6 e 25 hectáreas de eucaliptos. Ademais, o custo por hectárea de piñeiros é de 500 euros e o custo por hectárea de eucaliptos é de 300 euros, contando cun presuposto máximo de 12000 euros para a explotación en proxecto. Trala colleita da madeira os ingresos obtidos son de 2200 euros por cada hectárea de piñeiros e de 1500 euros por cada hectárea de eucaliptos.

¿Cantas hectáreas de piñeiros e de eucaliptos se deberían repoboar para obte-lo máximo beneficio? ¿a canto ascende dito beneficio? (a) Exprésense a función obxectivo e as restricións do problema. (b) Representése graficamente a rexión factible e calcúlense os vértices da mesma. (c) Resólvase o problema.

BLOQUE DE ANÁLISE (Puntuación máxima 3,5 puntos)

Exercicio 1. A cantidade de auga (en hm^3) dun encoro durante o último ano vén dada pola función

$$C(t) = \frac{210000}{(2t - k)^2 + 6}, \quad 0 \leq t \leq 12$$

onde t é o tempo transcorrido en meses.

- (a) Determinar o valor do parámetro k tendo en conta que a cantidade máxima de auga acadouna ó cuarto mes.
(b) Para o valor de $k = 8$, determina-los períodos nos que a cantidade de auga aumentou e nos que diminuíu. ¿A partir de que mes a cantidade de auga foi inferior a 1400 hm^3 ?

Exercicio 2. Un vendedor de pólizas de seguros ten un soldo fixo mensual de 1000 euros, máis unha comisión que ven dada pola función $17x - 0,0025x^3$, onde x representa o número de pólizas vendidas.

Se o vendedor ten mensualmente un gasto xeral de 200 euros, máis outro de 5 euros por póliza contratada, calcular o número de pólizas que debe contratar mensualmente para que a súa ganancia sexa máxima, ¿a canto ascende dita ganancia?

BLOQUE DE ESTADÍSTICA (Puntuación máxima 3,5 puntos)

Exercicio 1. Nun estudo feito en certo IES, no que se imparte a ESO e o Bacharelato, recolléronse os seguintes datos:

- O 60% dos alumnos son mulleres.
- O 15% dos homes estudan Bacharelato.
- O 20% das mulleres estudan Bacharelato.
- O 30% das mulleres que estudan Bacharelato elixen a opción de letras.

- (a) Calcula-la probabilidade de que un alumno dese IES, elixido ó chou, sexa muller, estude Bacharelato e curse a opción de letras. (b) ¿Que porcentaxe do alumnado estuda Bacharelato? (c) ¿Que porcentaxe dos estudantes de Bacharelato son homes?

Exercicio 2. Un fabricante de lámpadas de baixo consumo sabe que o tempo de duración, en horas, das lámpadas que fabrica segue unha distribución normal de media descoñecida e desviación típica 180 horas. Cunha mostra de ditas lámpadas, elixida ó chou, e un nivel de confianza do 97%, obtivo para a media o intervalo de confianza $(10072'1, 10127'9)$.

- (a) Calcular o valor que obtivo para a media da mostra e o tamaño de mostra utilizado.
(b) Se se quere que o erro da súa estimación sexa como máximo de 24 horas e se utiliza unha mostra de tamaño 225, ¿cal será entón o nivel de confianza?

CONVOCATORIA DE XUÑO

O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático. No caso de responde-los dous, será calificado coa nota do exercicio que figura co número 1 do bloque.

ÁLXEBRA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3 puntos).

Exercicio 1.

– Despeza-la X e obter: $X = \frac{1}{2} (A^2)^{-1} (A + B \cdot C)$ **0'5 puntos.**

– Calcular $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Calcular a inversa de A^2 , $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **1 punto.**

– Calcular $B \cdot C = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ **0'5 puntos.**

– Cálculo de $A + B \cdot C = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Obter a X pedida $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3/2 \end{pmatrix}$ **0'5 puntos.**

Exercicio 2.

Sexan "x" e "y" as hectáreas sembradas con cultivo tipo A e tipo B, respectivamente.

(a) Formular o sistema de inecuacións:
 $10x + 40y \leq 600; x + y \leq 45; y \leq x; y \geq 0$
0'25 puntos por cada unha delas.

(b) *Vértices da rexión factible:*
 Polos vértices (0, 0) e (45, 0) **0'25 puntos.**
 Polos (40, 5) e (12, 12) **0'5 puntos.**

– *Representación gráfica da rexión factible:* **0'75 puntos:** debuxar as catro rectas e a rexión do plano limitada por elas e polos catro vértices.

(c) *Optimización:* A función obxectivo $f(x, y) = 120x + 180y$ maximízase no vértice (40, 5) **0'25 puntos**, logo debería sembrar 40 hectáreas con cultivo tipo A e 5 hectáreas con cultivo tipo B para obter un beneficio máximo de 5700 euros **0'25 puntos.**

ANÁLISE (A puntuación máxima de cada exercicio é 3'5 puntos).

Exercicio 1.

(a) Calcular "a", "b" e "c" na función
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

– Por ter un máximo no punto "0":

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ **0'5 puntos.**

– Por pasar a función polo punto (0, 4):

$f(0) = 4 \Leftrightarrow c = 4$ **0'25 puntos.**

– Por pasa-la función polo punto (-1, 0):

$f(-1) = 0 \Leftrightarrow a = -3$ **0'25 puntos.**

(b) *Representar a función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$:*

– Intervalos: de crecemento $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ **0'5 puntos**, de decrecemento (0, 2) **0'25 puntos.**

– Mínimo relativo no punto (2, 0) **0'25 puntos.**

– No intervalo $(-\infty, 1)$ é cóncava hacia abaixo (cóncava) **0'25 puntos**, e no $(1, +\infty)$ é cóncava hacia arriba (convexa) **0'25 puntos.** Punto de inflexión no (1, 2) **0'25 puntos.**

– Representación gráfica: **0'75 puntos.**

Exercicio 2.

(a) *Expresar $N(1) = 50$ e obter $50 = \frac{350}{2+k+8}$* **0'5 puntos.** Calcular $k = -3$ **0'25 puntos.**

(b) *Calcular a derivada: $N'(t) = \frac{700(4-t^2)}{(2t^2 - 3t + 8)^2}$* **1 punto.**

– *Chegar a obter que na segunda semana se presenta o máximo* **0'5 puntos.**

– *Comprobar que é máximo* **0'25 puntos.**

– *Obter que o máximo de persoas afectadas é 70* **0'25 puntos.**

– *Formular a inecuación $\frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} < 25$* **0'25 puntos.**

– *Resolver $2t^2 - 17t + 8 > 0$ obtendo $t > 8$* **0'25 puntos** e concluir que a partir da oitava semana o número de persoas afectadas foi menor que 25 (a solución $0 < t < 1/2$ non serve xa que pide despois de acadar o valor máximo): **0'25 puntos.**

ESTADÍSTICA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3'5 puntos).

Exercicio 1.

Sexan os sucesos "R: unha persoa lembra o anuncio", "C: unha persoa merca o produto".

(a) *Formulación do enunciado: $P(R \cup C)$* **0'25 puntos.**

– *Pola fórmula da probabilidade anterior:*

$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C)$: **0'25 puntos.**

– *Calcular as probabilidades descoñecidas na fórmula anterior e chegar ó resultado final $P(R \cup C) =$*

Exemplos de resposta / Solucións

400/800 + 240/800 - 160/800 = 3/5: **0'75 puntos.**

(b) *Formulación do enunciado:* $P(C/R)$: **0'25 puntos.**

– *Pola fórmula da probabilidade condicionada:*

$$P(C/R) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

– *Calcular a probabilidade anterior:*

$$P(C/R) = 160/400 = 0'4 \quad \mathbf{0'75 \text{ puntos.}}$$

(c) *Definición de sucesos independentes:* **0'5 puntos.**

– *Polo cálculo das probabilidades descoñecidas na fórmula anterior:* $P(C/R) = 0'4$, $P(C) = 0'3$ (ou ben $P(C \cap R) = 0'2$, $P(C) = 0'3$ e $P(R) = 0'5$) e concluir que "o feito de mercar o produto depende de lembrar o anuncio" **0'5 puntos.**

Exercicio 2.

Sexa "X" = soldo, en euros, dun empregado dunha fábrica" $X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 400)$. Elíxese unha mostra de $n = 25$ empregados desa fábrica,

(a) *Determinar a distribución de \bar{X} e chegar a que:*

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 1500, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80\right) \quad \mathbf{0'75 \text{ puntos.}}$$

– *Formular a probabilidade pedida:*

$$P(1420 \leq \bar{X} \leq 1600) \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

– *Tipificación:* $P(-1 \leq Z \leq 1'25)$ **0'25 puntos.**

– *Transformar para poder facer uso da táboa:*

$$P(Z \leq 1'25) - 1 + P(Z \leq 1) \quad \mathbf{0'5 \text{ puntos.}}$$

– *Chegar ó resultado final:* 0'7357 **0'25 puntos.**

(b) *Formulación:* $z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq e$ **0'5 puntos.**

$$\text{Calcular } z_{\alpha/2} = z_{0'025} = 1'96 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

$$\text{– Cálculo de "n" na desigualdade: } 1'96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} \leq 100,$$

$$\text{obtendo } n \geq 61'46 \quad \mathbf{0'5 \text{ puntos.}}$$

– *Conclusión:* Deberíamos tomar mostras de polo menos 62 empregados **0'25 puntos.**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático. No caso de responde-los dous, será calificado coa nota do exercicio que figura co número 1 do bloque.

ÁLXEBRA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3 puntos).

Exercicio 1.

– *Despexar a matriz X e obter:* $X = -B^t(A - 2I)^{-1}$

0'75 puntos.

$$\text{– Cálculo da matriz } A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

0'5 puntos.

– *Cálculo da matriz inversa de (A - 2I) por calquera*

$$\text{método: } (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1 \text{ punto.}}$$

– *Resolve-la ecuación matricial, obtendo:*

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0'75 \text{ puntos.}}$$

Exercicio 2.

Sexan "x" e "y" as hectáreas de piñeiros e de eucaliptos, respectivamente.

(a) *Formular as restricións:* $2 \leq x \leq 15$, $6 \leq y \leq 25$, $500x + 300y \leq 12000$, **0'25 puntos** por cada unha delas.

$$\text{– Función obxectivo: } z = (2200 - 500)x + (1500 - 300)y = 1700x + 1200y \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

(b) *Vértices da rexión factible:* Polos vértices (2, 6), (2, 25) e (15,6) **0'25 puntos**, polos (9, 25) e (15, 15), **0'5 puntos.**

– *Representación gráfica da rexión factible* **0'75 puntos:** debuxar as cinco rectas e a rexión do plano limitada por elas e polos cinco vértices.

(c) *Obter a solución óptima:* No vértice (9, 25)

0'25 puntos.

– *Beneficio máximo:* 45300 euros **0'25 puntos.** Deberían repoboar 9 ha. de piñeiros e 25 ha. de eucaliptos para obter un beneficio máximo de 45300 euros.

ANÁLISE (A puntuación máxima de cada exercicio é 3'5 puntos).

Exercicio 1.

$$(a) \text{ Calcular a derivada } C'(t) = \frac{-840.000(2t - k)}{[(2t - k)^2 + 6]^2}$$

1 punto.

– *Pola condición de máximo no cuarto mes* $C'(4) = 0$

0'5 puntos.

Exemplos de resposta / Solucións

– Obter o valor de $k = 8$ **0'5 puntos.**

(b) Intervalo de crecemento (0, 4) **0'25 puntos**, de decrecemento (4, 12) **0'25 puntos**. Logo, a auga aumentou ata o cuarto mes, e diminuíu do cuarto mes ó final de ano.

– Formular a inecuación $\frac{210.000}{(2t - 8)^2 + 6} < 1400$ **0'5 puntos.**

– Resolvela obtendo o intervalo de tempo pedido ($t > 10$), é dicir, que a partir do 10º mes a cantidade de auga é inferior a 1400 hm³. **0'5 puntos.**

Exercicio 2.

– Obter a función ingreso mensual:

$1000 + 17x - 0'0025x^3$, sendo x o número de pólizas vendidas **0'5 puntos.**

– Obter a función gasto mensual: $200 + 5x$ **0'5 puntos.**

– Obter a función ganancia mensual:

$G(x) = 800 + 12x - 0'0025x^3$, $x > 0$ **0'5 puntos.**

– Derivada da función: $G'(x) = 12 - 0'0075x^2$ **0'5 puntos.**

– Calcular o punto crítico: $x = 40$ **0'5 puntos.**

– Xustificar que é un máximo: $G''(40) < 0$ **0'5 puntos.**

– Vendendo ó mes 40 pólizas a súa ganancia máxima é 1120€ **0'5 puntos.**

ESTADÍSTICA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3'5 puntos).

Exercicio 1.

Sexan os sucesos “ M : un alumno é muller”, “ H : un alumno é home”, “ B : un alumno estuda Bacharelato” e “ L : un alumno cursa a opción de Letras”

(a) Formulación do enunciado: $P(M \cap B \cap L)$ **0'25 puntos.**

– Pola fórmula da probabilidade $P(M \cap B \cap L) = P(M) \cdot P(B/M) \cdot P(L/M \cap B)$ **0'5 puntos.**

– Resultado final 0'036 **0'25 puntos.**

(b) Expresión do teorema das probabilidades totais $P(B) = P(M) \cdot P(B/M) + P(H) \cdot P(B/H)$ e cálculos correspondentes $0'60 \cdot 0'20 + 0'40 \cdot 0'15$ **1'25 puntos.**

– Resultado pedido: “O 18% do alumnado estuda Bacharelato” **0'25 puntos.**

(c) Formulación $P(H/B)$ **0'25 puntos.**

– Pola fórmula da probabilidade condicionada $\frac{P(H \cap B)}{P(B)} = \frac{0'40 \cdot 0'15}{0'18}$ **0'5 puntos.**

– Resultado final “O 33'3% dos estudantes de Bacharelato son homes” **0'25 puntos.**

Puntúase con **0'5 puntos** no caso de que só formulen ben as probabilidades asociadas ó enunciado do problema: $P(M) = 0'60$, $P(B/H) = 0'15$, $P(B/M) = 0'20$ e $P(L/M \cap B) = 0'30$

Exercicio 2.

(a) “ X = tempo, en horas, de duración dunha lámpada de baixo consumo” $X \sim N(\mu, \sigma = 180)$

– Cálculo de $z_{\alpha/2} = z_{0'015} = 2'17$ **0'5 puntos.**

– Formular a ecuación do radio do intervalo:

$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'17 \cdot \frac{180}{\sqrt{n}} = \frac{390'6}{\sqrt{n}}$ **0'5 puntos.**

– Igualando os extremos do intervalo de confianza para a media cos do enunciado do problema:

$\bar{X} - \frac{390'6}{\sqrt{n}} = 10072'1$ e $\bar{X} + \frac{390'6}{\sqrt{n}} = 10127'9$ e

resolvendo, obtense que a media mostral $\bar{X} = 10100$ horas **0'5 puntos**, e o tamaño da mostra $n = 196$ lámpadas **0'5 puntos.**

(b) Formulación da ecuación: $z_{\alpha/2} \frac{180}{\sqrt{225}} = 24$ **0'5 puntos.**

– Calcular o valor da área na táboa: $1 - \alpha/2 = 0'9772$ **0'5 puntos.**

– Calcular o nivel de confianza pedido: $1 - \alpha = 0'9544$ (un 95'4% de confianza) **0'5 puntos.**